En raison du festival « Balélec », notez le changement de salles suivant pour les séances d'exercices du 1er mai 2025 :

1. Le cours en salle CM 0 9 est déplacé en salle CO 015.
2. Le cours en salle CM 0 11 est déplacé en salle CO 016.
3. Le cours en salle CM 0 13 est déplacé en salle CO 017.

Exercice 1. (a) Montrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique, alors la matrice $(I - A)$ est inversible.

(b) Ce résultat est-il vrai pour une matrice antisymétrique complexe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

Remarque 1. Cet exercice complète l'exercice 9.7. Le point (a) permet de justifier que la transformation de Cayley est bien définie.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel euclidien et $f : E \to E$ une application linéaire. On suppose que f préserve les normes, i.e. $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

1. Prouver que f est un isomorphisme de E dans lui-même.
2. Démontrer que f préserve les produits scalaires, i.e. $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout $x, y \in E$.
3. Démontrer que réciproquement si f préserve les produits scalaires, alors f préserve les normes.
4. Que peut-on dire de la matrice de f dans une base orthonormée ?

Exercice 3. Rappelons que

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cap \left\{A : A^t A = \mathrm{I}_n\right\}.$$

Une matrice A est dite *orthogonale* si $A \in \mathrm{O}(n)$.

1. Prouver que $A \in \mathrm{O}(n)$ si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que le déterminant d'un matrice orthogonale est égal à 1 ou -1.
3. Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
4. On note $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \{A : \det(A) = 1\}$. Montrer que $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n)$ est un sous groupe.
5. L'ensemble $\mathrm{O}(n) \cap \{A : \det(A) = -1\} \subset \mathrm{O}(n)$ est il un sous-groupe ?

Exercice 4. Soient A et B des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant votre réponse.

1. Si AB est orthogonale, alors A et B sont aussi orthogonales.
2. Si AB est orthogonale, alors A est orthogonale si et seulement si B est orthogonale
3. Si A est orthogonale et symétrique, alors $A^2 = \mathrm{I}_n$.
4. Si $A^2 = \mathrm{I}_n$, alors A est ou bien une matrice orthogonale ou bien une matrice symétrique.

Exercice 5. (a) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale du sous-espace $W \subset \mathbb{R}^4$ engendré par

$$w_1 = (2, 0, 0, 2), \quad w_2 = (1, 1, -1, 1), \quad w_3 = (0, 1, 2, 2)$$

pour le produit scalaire standard.

(b) Calculer la distance entre W et le point $x = (5, 1, 3, -1)$.

(c) Notons $S_2 \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des 2×2 matrices symétriques. Trouver une base orthonormée de S_2 pour le produit scalaire $\tau(A, B) = \mathrm{Tr}(A^t \cdot B)$.

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on considère le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

1. Montrer que pour tout n la famille de vecteurs $\{\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx\}$ est orthogonale (c'est-à-dire que ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux) (Indication : la relation $2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ est utile).
2. Calculer la norme de $\cos(mx)$ pour ce produit scalaire.
3. Calculer la distance entre $\cos(mx)$ et $\cos(nx)$.

Exercice 7. (a) On muni l'espace $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réel du produit scalaire L^2 sur l'intervalle $[-1, 1]$, rappelons que ce produit scalaire est défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \qquad (f, g \in \mathbb{R}[x]).$$

Calculer le produit scalaire des polynômes x^n et x^m (pour $m, n \in \mathbb{N}$ quelconques), ainsi que la norme de x^m.

(b) On appelle *polynômes de Legendre* la suite de polynômes $\{P_k\} \subset \mathbb{R}[x]$ de coefficient dominant positif telle que $\deg(P_k) = k$ et $\{p_0, p_1, p_2, p_3, \dots\}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}[x]$ pour ce produit scalaire. Calculer les 4 premiers polynômes de Legendre (les 6 premiers si vous êtes courageux).

Indication : On peut trouver ces polynômes en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ de $\mathbb{R}[x]$.

Exercice 8. *Dans cet exercice on construit un exemple d'espace vectoriel qui n'est pas isomorphe à son dual.*

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathscr{S} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On a donc $x \in \mathscr{S}$ si et seulement si $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où $x_n \in \mathbb{K}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note aussi $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des suites à support borné (identiquement nulles à partir d'un certain rang) :

$$\mathscr{S}_0 = \mathscr{S} \cap \{x : \text{il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_n = 0\ \forall n > m\}\,.$$

1. Expliquer rapidement comment on muni $\mathscr{S}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Prouver que $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel.
3. Définir soigneusement ce qu'est une base d'un espace vectoriel (on ne suppose pas qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie). Puis prouver qu'il existe une base dénombrable de $\mathscr{S}_0$.
4. Montrer que l'application $\beta : \mathscr{S} \times \mathscr{S}_0 \to \mathbb{K}$ définie par
$$\beta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$
est bien définie et qu'il s'agit d'une application bilinéaire.
5. Prouver que l'application β définit un accouplement non-dégénéré entre les espaces vectoriels $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_0$.

   Les questions qui suivent demandent une certaine familiarité avec les notions d'ensembles dénombrables et non dénombrables. On pourra au besoin consulter le §2.8 du polycopié d'algèbre 1.
6. On suppose maintenant que $\mathbb{K}$ est un corps fini (on pourra supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ est le corps à deux éléments). Prouver que dans ce cas $\mathscr{S}_0$ est un ensemble dénombrable et que $\mathscr{S}$ est non dénombrable.
7. A partir des deux points précédents, prouver qu'il n'existe aucune bijection entre l'espace vectoriel $\mathscr{S}_0$ et son dual $\mathscr{S}_0'$; en particulier $\mathscr{S}_0$ n'est pas isomorphe à son dual.
8. Montrer ensuite que $\mathscr{S}$ n'admet pas de base dénombrable (toujours sous l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est un corps fini).